TITLE:
多段階木変換機について(計算モデルと計算の複雑さに関する研究)

AUTHOR(S):
藤芳, 明生; 黒川, 浩一; 笠井, 琢美

CITATION:
藤芳, 明生 ...[et al]. 多段階木変換機について(計算モデルと計算の複雑さに関する研究). 数理解析研究所講究録 1996, 950: 214-220

ISSUE DATE:
1996-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/60317

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
950 巻 1996 年 214-220

多段階木変換機について

藤芳明生　　黒川浩一　　笠井琢美
Akio Fujiyoshi　Kurokawa Koichi　Takumi Kasai

電気通信大学情報工学科
E-mail: fujiyo-a@calvyn.cs.uec.ac.jp

1　はじめに

木を入力としたとき木を出力する機械を木変換機という．与えられた文を機械翻訳する際，文は構文解析という過程で木に置き換えられる．得られた木に対し操作を行う．そこで，木に対し行う操作を形式的に記述し評価するための道具として木変換機を用いる．本稿では二段階変換という木変換機のモデルを提案する．

これまで，木変換機のモデルとして，Rounds[2]，Thatcher[3] により Finite State Tranformation(FST) というものが提案されている．FST は一般順序機械の定義域を文字列から木へ拡張したもの (Generalized^2 Sequential Machine) として紹介されているとおり，一般順序機械の定義を自然に発展させて得られている．FST は入力の木が与えられたとき，まず根に状態を与えて書き換え規則を適応し，トップダウンに子に遷移した状態を伝えて処理を続ける．そして，すべての葉の処理が終わったとき出力が得られる．これをトップダウン変換と呼ぶことにする．

一方，木オートマトンはボトムアップに葉から根に向かって処理を行う．このように，葉からボトムアップに処理を行うボトムアップ変換の定義も自然に与えることができる．この二つ変換の決定性モデルについて，その能力を比較する．まず，トップダウン変換にできてボトムアップ変換にできない変換の例を Figure.1 にあげる．これは，葉以外のすべての節点のラベルを根と同じものに書き換えるという変換である．一方，ボトムアップ変換にできてトップダウン変換にできない変換も存在する．その例を Figure.2 にあげる．これは，ある節点の子がどれも葉ではなく，すべて子のラベルが一致したときのみその節点のラベルを子と同じものに書き換え，そうでないときはそのままのラベルにしておくという操作をボトムアップに繰り返し行う変換がある．

このように両者の決定性モデルを比較すると互いに他にはない能力を持っている．そのため，トップダウン変換とボトムアップ変換を有限回組み合わせることによって実現される木変換を考え，それを多段階木変換と呼ぶことにする．本稿では多段階木変換の能力について考察する．

今回提案する二段階変換は，まず入力の木が与えられると葉からボトムアップに処理を始め，各節点に現在の状態を残して親に遷移した状態を伝えていく．根の状態が定まると今度はトップダウンの処理に移る．まず根に状態を与え，この状態とボトムアップのとき各節点に残して置かれた状態の両者により書き換え規則を選択し適応する．そして，トップダウンに子に遷移した状態を伝えて処理を続け，すべての葉の処理が終わったとき出力が得られる．

この二段階変換はトップダウン変換とボトムアップ変換の両者の能力を含んでいる．また，ランク保存という条件のもとで合成に閉じていることを示すことができた．つまり，二段階変換は一回の変換で多段階木変換と同等の能力を持った変換を行うことができるのである．

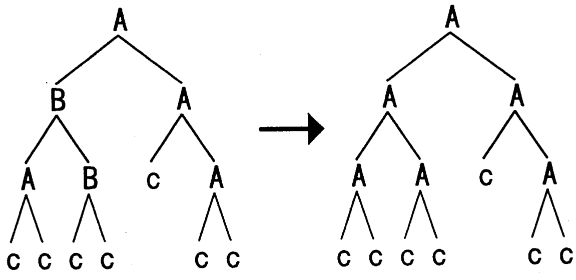

Figure.1

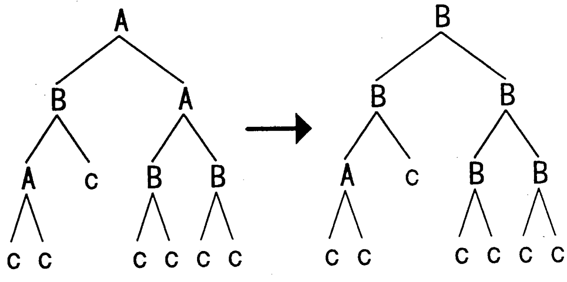

Figure.2

2 諸定義

定義 2.1 **階層化アルファベット**とは，対(Σ, r)のことである．Σは記号の有限集合であり，$r : \Sigma \to N$ (Nは自然数全体からなる集合) である．$\Sigma_n = r^{-1}(n)$とする．

定義 2.2 N_+を正整数全体からなる集合とする．**木の台集合**とは，次を満たす$(N_+)^*$の有限部分集合Dである．

- $a \in D$かつ$a = a_1 a_2$，$a_1, a_2 \in (N_+)^*$ならば$a_1 \in D$.
- $i, j \in N_+$に対し$i \leq j$かつ$a\,j \in D$ならば，$a\,i \in D$となる.

Dの元を**節点**と呼ぶ．特に，$a\,1 \notin D$を満たす節点aを**葉**と呼ぶ．モノイド$(N_+)^*$の単位元をεで表し，εを**根**と呼ぶ．葉a, bに対し，aが辞書式順序でbより小さいならば，aはbより**左にある**という．

定義 2.3 Σ**上の木**とは，関数$t : D \to \Sigma$で，任意の$a \in D$に対し，$r(t(a)) = \max\{i | ai \in D\}$を満たしているものである．ただし，$D$は木の台集合，$\Sigma$は階層化アルファベットである．$D_t$で木$t$に対応する木の台集合，つまり，関数$t$の定義域を表すことにする．$\Sigma$上の木全体からなる集合を$\mathrm{T}_\Sigma$と書く．

$t \in \mathrm{T}_\Sigma$, $a \in D_t$のとき，$t/a = \{(b, \sigma) | (a\,b, \sigma) \in t\}$とする．$t/a$は木$t$の節点$a$における**部分木**である．

Σ上の木を，Σの記号と$(,)$を用いて次のように表現する．

- $t(\varepsilon) = \lambda \in \Sigma_0$のとき，木$t$を$\lambda$で表す．
- $t(\varepsilon) = \sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$かつ，各i, $1 \leq i \leq n$についてt/iの表現がt_iのとき，木tを$\sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$と表す．

木tが$\sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$と表現されるとき，$t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$と書く．

定義 2.4 IをΣと共通部分を持たない集合とする．Iをインデックスの集合とするΣ上の**インデックス付き木**とは，関数$t : D \to \Sigma \cup I$で次を満たすものである．任意の$a \in D$に対し，$t(a) \in \Sigma$ならば$r(t(a)) = \max\{i | a\,i \in D\}$，また，$t(a) \in I$ならば$a$は葉となっている．ただし，$D$は木の台集合，$\Sigma$は階層化アルファベットである．$I$をインデックスの集合とする$\Sigma$上のインデックス付き木全体からなる集合を$\mathrm{T}_\Sigma(I)$と書く．インデックス付き木$t$の節点$a$における部分木$t/a$も同様に，$t \in \mathrm{T}_\Sigma(I)$, $a \in D_t$のとき，$t/a = \{(b, \sigma) | (a\,b, \sigma) \in t,\ \sigma \in \Sigma \cup I\}$と定義される．

Iをインデックスの集合とするΣ上の木を，IとΣの記号と$(,)$を用いて次のように表現する．

- $t(\varepsilon) = \lambda \in \Sigma_0$のとき，木$t$を$\lambda$で表す．
- $t(\varepsilon) = i \in I$のとき，木tをiで表す．
- $t(\varepsilon) = \sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$かつ，各j, $1 \leq j \leq n$についてt/jの表現がt_jのとき，木tを$\sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$で表す．

インデックス付き木tが$\sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$と表現されるとき，$t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$と書く．

定義 2.5 Iをインデックスの集合とする．関数$\mathrm{index} : \mathrm{T}_\Sigma(I) \to I^*$を次のように定義する．

- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，$\mathrm{index}(t) = \varepsilon$.
- $t = i \in I$のとき，$\mathrm{index}(t) = i$.
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$のとき，$\mathrm{index}(t) = \mathrm{index}(t_1)\mathrm{index}(t_2) \cdots \mathrm{index}(t_n)$.

定義 2.6 I, Jをインデックスの集合とする．$t \in \mathrm{T}_\Sigma(I)$, $\mathrm{index}(t) = i_1 i_2 \cdots i_k$, $t_1, t_2, \cdots, t_k \in \mathrm{T}_\Sigma(J)$のとき，$t[t_1, t_2, \cdots, t_k] = \{(a, \sigma) \in t | \sigma \in \Sigma\} \cup \{(a\,b, \sigma) | \exists h \in \{1, 2, \cdots, k\},\ (a, i_h) \in t, i_h \in I,\ (b, \sigma) \in t_h\}$と定義する．$t[t_1, t_2, \cdots, t_k] \in \mathrm{T}_\Sigma(J)$は，木$t$の各インデックス$i_h$を木$t_h$で置き換えた木である．

定義 2.7 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$を固定された変数の集合とする．$X_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$で，$X$の先頭の$n$個の元からなる部分集合を表す．したがって，$X_0 = \emptyset$である．

3 トップダウン変換とボトムアップ変換

定義 3.1 (決定性)**トップダウン変換**とは，$T = (Q, \Sigma, \tau, q_0)$のことである．$Q$は状態の有限集合，$\Sigma$は階層化アルファベット，$q_0$は初期状態である．$\tau = \{\tau_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$は次のように$\Sigma$の各元に割り当てられた関数の集合である．$\lambda \in \Sigma_0$に対し$\tau_\lambda : Q \to \mathrm{T}_\Sigma$，また，$\sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$に対し$\tau_\sigma : Q \to \mathrm{T}_\Sigma(Q \times X_n)$である．

定義 3.2 トップダウン変換Tの**動作関数**$\hat{\tau} : Q \times \mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$を次のように定義する．

- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，$\hat{\tau}(q, t) = \tau_\lambda(q)$.

- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$\tau_\sigma(q) = u$, $\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば，
  $\hat{\tau}(q,t) = u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})]$.

定義 3.3 トップダウン変換Tに対し，$\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$上の関係$\Rightarrow_T$を次のように定義する．$t \in \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$に対し，ある葉$a \in D_t$が$t(a) \in Q \times \mathrm{T}_\Sigma$となっているならば，$t \Rightarrow_T \{(b,\sigma) \in t \mid b \neq a\} \cup \{(a\,b,\sigma) \mid (b,\sigma) \in \hat{\tau}(t(a))\}$とする．この場合，$T$が$t$の葉$a$に対して変換を行なったという．

定義 3.4 インデックスの付いた葉の最も左のものから順に変換を行う$\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$上の関係$\underset{L}{\Rightarrow}_T$を次のように定義する．$a \in D_t$が$t(a) \in Q \times \mathrm{T}_\Sigma$となる葉の中で最も左にあるならば，$t \underset{L}{\Rightarrow}_T \{(b,\sigma) \in t| b \neq a\} \cup \{(a\,b,\sigma) \mid (b,\sigma) \in \hat{\tau}(t(a))\}$.

任意の$t, t' \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し，$t \underset{L}{\Rightarrow}^*_T t' \Leftrightarrow t \Rightarrow^*_T t'$をみたす．つまり，どのインデックスの付いた葉から変換を始めるかという順序は最終的な出力には関係ないのである．これは，本稿で紹介するすべての変換について成り立つ．

$\Rightarrow^*_T$は関数となるので，$t, t' \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し，$T(t) = t' \Leftrightarrow (q_0, t) \Rightarrow^*_T t'$と定義して，変換$T$を$\mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma$という関数と見なすことにする．

定義 3.5 (決定性)ボトムアップ変換とは，$T = (P, \Sigma, \rho, \tau)$のことである．$P$は状態の有限集合，$\Sigma$は階層化アルファベットである．$\rho = \{\rho_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$は次のように$\Sigma$の各元に割り当てられた関数である．$\lambda \in \Sigma_0$に対し$\rho_\lambda \in P$，また，$\sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$に対し$\rho_\sigma : P^n \to P$である．$\tau = \{\tau_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$も次のように$\Sigma$の各元に割り当てられた関数の集合である．$\lambda \in \Sigma_0$に対し$\tau_\lambda : P \to \mathrm{T}_\Sigma$，また，$\sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$に対し$\tau_\sigma : P \to \mathrm{T}_\Sigma(X_n)$である．

定義 3.6 ボトムアップ変換Tの応答関数$\hat{\rho} : \mathrm{T}_\Sigma \to P$を次のように定義する．
- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，$\hat{\rho}(t) = \rho_\lambda$.
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$\hat{\rho}(t) = \rho_\sigma(\hat{\rho}(t_{i_1}), \hat{\rho}(t_{i_2}), \cdots, \hat{\rho}(t_{i_k}))$.

定義 3.7 ボトムアップ変換Tの出力関数$\hat{\tau} : \mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma$を次のように定義する．
- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，$\hat{\tau}(t) = \tau_\lambda(\hat{\rho}(t))$.
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$\tau_\sigma(\hat{\rho}(t)) = u$, $\mathrm{index}(u) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ ならば，$\hat{\tau}(t) = u[\hat{\tau}(t_{i_1}), \hat{\tau}(t_{i_2}), \cdots, \hat{\tau}(t_{i_k})]$.

$T(t) = \hat{\tau}(t)$として，変換Tを$\mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma$という関数と見なすことにする．

4 二段階変換

定義 4.1 (決定性)二段階変換とは，$T = (P, Q, \Sigma, \rho, \tau, F, q_0)$のことである．$P, Q$は有限集合で，$P$の元を探索状態，$Q$の元を変換状態という．$\Sigma$は階層化アルファベット，$F \subseteq P$は最終状態の集合，$q_0 \in Q$は初期状態である．$\rho = \{\rho_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$はボトムアップ変換のものと同様である．$\tau = \{\tau_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$は次のように$\Sigma$の各元に割り当てられた関数の集合である．$\lambda \in \Sigma_0$に対し$\tau_\lambda : P \times Q \to \mathrm{T}_\Sigma$，また，$\sigma \in \Sigma_n$, $n \geq 1$に対し$\tau_\sigma : P \times Q \to \mathrm{T}_\Sigma(Q \times X_n)$である．

定義 4.2 二段階変換Tの応答関数$\hat{\rho} : \mathrm{T}_\Sigma \to P$はボトムアップ変換のものと同様と定義する．

定義 4.3 二段階変換Tの動作関数$\hat{\tau} : Q \times \mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$を次のように定義する．
- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，$\hat{\tau}(q,t) = \tau_\lambda(\hat{\rho}(t), q)$.
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$\tau_\sigma(\hat{\rho}(t), q) = u$, $\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば，
  $\hat{\tau}(q,t) = u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})]$.

定義 4.4 二段階変換Tに対し，$\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$上の関係$\Rightarrow_T$はトップダウン変換のものと同様と定義する．

$t, t' \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し，$T(t) = t' \Leftrightarrow (q_0, t) \Rightarrow^*_t t', \hat{\rho}(t) \in F$と定義して，変換$T$を$\mathrm{T}_\Sigma \to \mathrm{T}_\Sigma$という部分関数と見なす．

補題 4.5 $T = (P, Q, \Sigma, \rho, \tau, F, q_0)$を$\rho$または$\tau$，もしくは両方が部分関数の集合であることを許した二段階変換とする．すると，ρ, τが関数の集合である二段階変換T'が存在して$T = T'$となる．
(証明) $T = (P, Q, \Sigma, \rho, \tau, F, q_0)$を$\rho$が部分関数の集合である二段階変換とする．これに対し，ρが関数の集合となっている二段階変換$T' = (P', Q, \Sigma, \rho', \tau', F', q_0)$を次のように構成し$T = T'$を示す．
- Q, q_0はTと同じとする．
- $P' = P \cup \{p_{\mathrm{undef}}\}$, $p_{\mathrm{undef}} \notin P$とする．

- $\rho' = \{\rho'_\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．$\sigma \in \Sigma_n$ に対し，$p_1, \cdots, p_n \in P'$ が p_{undef} を含まないとき，$\rho_\sigma(p_1, \cdots, p_n)$ が定義されているならば $\rho'_\sigma(p_1, \cdots, p_n) = \rho_\sigma(p_1, \cdots, p_n)$ とし，未定義ならば $\rho'_\sigma(p_1, \cdots, p_n) = p_{\mathrm{undef}}$ とする．また，$p_1, \cdots, p_n$ の中に p_{undef} が存在するときは常に $\rho'_\sigma(p_1, \cdots, p_n) = p_{\mathrm{undef}}$ とする．
- $\tau' = \{\tau'_\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．$(p, q) \in P' \times Q$ に対し，$p \neq p_{\mathrm{undef}}$ ならば $\tau'_\sigma(p, q) = \tau_\sigma(p, q)$ とし，$p = p_{\mathrm{undef}}$ ならば $\tau'_\sigma(p, q)$ は何か適当な木を返すとする．
- $F' = F$ とする．

このように T' を構成すると ρ' は確かに関数の集合となり，τ が関数の集合であれば τ も関数の集合となる．そして，$t \in \mathrm{T}_\Sigma$ に対し，T の応答関数 $\hat{\rho}(t)$ が定義されているならば $\hat{\rho}'(t) = \hat{\rho}(t)$，未定義ならば $\hat{\rho}'(t) = p_{\mathrm{undef}}$ となる．よって，明らかに $T = T'$ である．

つぎに，$T = (P, Q, \Sigma, \rho, \tau, F, q_0)$ を τ が部分関数の集合である二段階変換とする．これに対し，τ が関数の集合となっている二段階変換 $T' = (P', Q, \Sigma, \rho', \tau', F', q_0)$ を次のように構成し $T = T'$ を示す．

- Q, q_0 は T と同じとする．
- $P' = P \times 2^Q$ とする．
- $\rho' = \{\rho'_\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．
  (1) $\lambda \in \Sigma_0$ に対し，$\rho'_\lambda = (\rho_\lambda, \{q \in Q | \tau_\lambda(\rho_\lambda, q)$ が定義されている $\})$ とする．
  (2) $\sigma \in \Sigma_n$，$n \leq 1$ に対し，$\rho'_\sigma((p_1, Q_1), (p_2, Q_2), \cdots, (p_n, Q_n)) = (\, \rho_\sigma(p_1, p_2, \cdots, p_n),\ \{q \in Q \,|$
  $\tau_\sigma(\, \rho_\sigma(p_1, p_2, \cdots, p_n), q) = u$, $\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば，
  $q_1 \in Q_{i_1}, q_2 \in Q_{i_2}, \cdots, q_n \in Q_{i_n}$ となっている $\}\,)$ とする．
- $\tau' = \{\tau'_\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．$(p, Q_j, q) \in P \times 2^Q \times Q$ に対し，$\tau_\sigma(p, q)$ が定義されているならば $\tau'_\sigma((p, Q_j), q) = \tau_\sigma(p, q)$ とし，未定義ならば $\tau'_\sigma((p, Q_j), q)$ は何か適当な木を返すとする．
- $F' = \{(q, Q_F) \in P' \,|\, p \in F,\ q_0 \in Q_F\}$ とする．

このように T' を構成すると τ' は確かに関数の集合となり，ρ が関数の集合であれば ρ' も関数の集合となる．そして，次の $(*)$ が成り立つ．

$(*)$ $t \in \mathrm{T}_\Sigma$ に対し，$(q, t) \Rightarrow_T^* s$, $s \in \mathrm{T}_\Sigma$ かつ $\hat{\rho}(t) = p$ となる必要十分条件は $\hat{\rho}'(t) = (p, Q_j)$ かつ $q \in Q_j$ である．

$(*)$ の証明は後にある補題5.8の証明とほぼ同様に入力の木に対する帰納法で証明できる．しかし，ここでは省略する．$(*)$ が成り立てば明らかに $T = T'$ が成り立つ．

これより先，二段階変換においては ρ, τ が関数の集合でも部分関数の集合でもどちらでもよいことにする．

5　非決定性トップダウン変換と単経路変換

定義 5.1 非決定性トップダウン変換とは，$T = (Q, \Sigma, \pi, q_0)$ のことである．Q は状態の有限集合，q_0 は初期状態，Σ は階層化アルファベットである．$\pi = \{\pi_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$ は次のように Σ の各元に割り当てられた関係の集合である．$\lambda \in \Sigma_0$ に対し π_λ は $Q \times \mathrm{T}_\Sigma$ の有限部分集合，$\sigma \in \Sigma$, $n \geq 1$ に対し π_σ は $Q \times \mathrm{T}_\Sigma(Q \times X_n)$ の有限部分集合である．

定義 5.2 非決定性トップダウン変換 T の動作関数 $\hat{\pi} : Q \times \mathrm{T}_\Sigma \to 2^{\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)}$ を次のように定義する．

- $t = \lambda \in \Sigma_0$ のとき，$\hat{\pi}(q, t) = \{u \,|\, (q, u) \in \pi_\lambda\}$．
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$\pi_\sigma(q, t)$ はつぎを満たす木の最小の集合である．$(q, u) \in \pi_\sigma$, $\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば，$u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})]$ は $\hat{\pi}(q, t)$ に含まれる．

定義 5.3 非決定性トップダウン変換 T に対し，$\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ 上の関係 $\Rightarrow_T$ を次で定義する．$t \in \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$, $a \in D_t$, $t(a) \in Q \times \mathrm{T}_\Sigma$ ならば，$\hat{\pi}(t(a))$ の元 $s \in \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ を選択し，$t \Rightarrow_T \{(b, \sigma) \in t \,|\, b \neq a\} \cup \{(a\,b, \sigma) \,|\, (b, \sigma) \in s\}$．

決定性トップダウン変換と同様に，$\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ 上の関係 $\underset{L}{\Rightarrow}_T$ を次で定義する．$a \in D_t$ が $t(a) \in Q \times \mathrm{T}_\Sigma$ となる葉の中で最も左にあるならば，$\hat{\pi}(t(a))$ の元 $s \in \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ を選択し，$t \underset{L}{\Rightarrow}_T \{(b, \sigma) \in t \,|\, b \neq a\} \cup \{(a\,b, \sigma) \,|\, (b, \sigma) \in s\}$．

$t \in \mathrm{T}_\Sigma$ に対し，$T(t) = \{t' \in \mathrm{T}_\Sigma \,|\, (q_0, t) \Rightarrow_T^* t'\}$ と定義して，変換 T を $\mathrm{T}_\Sigma \to 2^{\mathrm{T}_\Sigma}$ という関数と見なすことにする．

定義 5.4 $\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ の元の空でない有限列，$t_1, t_2, \cdots .t_n$ が $\Rightarrow_T$ に対する計算であるとは，各 i, $1 \leq i < n$ に対し $t_i \Rightarrow_T t_{i+1}$ が成り立つことである．

定義 5.5 $\mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ の元の空でない有限列，$t_1, t_2, \cdots .t_n$ が $\Rightarrow_T$ に対する最左計算であるとは，各 i, $1 \leq i < n$ に対し $t_i \underset{L}{\Rightarrow}_T t_{i+1}$ が成り立つことである．

定義 5.6 **単経路変換**とは，非決定性トップダウン変換$T=(Q,\Sigma,\pi,q_0)$で，任意の入力$t\in \mathrm{T}_\Sigma$に対して，$(q_0,t)\Rightarrow_T^* t', t'\in \mathrm{T}_\Sigma$ならば最左計算$(q_0,t)=t_1,t_2,\cdots,t_n=t'$が一意に定まるものである．単経路変換$T$は次のように定義することによって$\mathrm{T}_\Sigma\to\mathrm{T}_\Sigma$という部分関数とみなすことができる．$t,t'\in\mathrm{T}_\Sigma$について$T(t)=t' \Leftrightarrow (q_0,t)\Rightarrow_T^* t'$とする．

定義 5.7 Tを非決定性トップダウン変換とする．$t=\sigma(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathrm{T}_\Sigma$に対し$\pi_\sigma$の元$(q,u)$が**正当**であるとは，ある$s\in\mathrm{T}_\Sigma$が存在して$(q,t)\Rightarrow_T u'\Rightarrow_T^* s$となることをいう．ただし，$u'$は$\mathrm{index}(u)=(q_1,x_{i_1})(q_2,x_{i_2})\cdots(q_k,x_{i_k})$ならば$u'=u[(q_1,t_{i_1}),(q_2,t_{i_2}),\cdots,(q_k,t_{i_k})]$と表せられる．

補題 5.8 (q,u)がπ_σの元で，$\mathrm{index}(u)=(q_1,x_{i_1})(q_2,x_{i_2})\cdots(q_k,x_{i_k})$であるとする．すると，$t=\sigma(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathrm{T}_\Sigma$に対し，$(q,u)$が正当であるための必要十分条件は，各$j$, $1\le j\le k$に対し$t_{i_j}(\varepsilon)=\delta$ならば$t_{i_j}$に対し$\pi_\sigma$の正当な元で状態が$q_j$のものが存在することである．
(証明) $t\in\mathrm{T}_\Sigma$の帰納法で証明する．$t=\lambda\in\Sigma_0$のときは明らか．$t=\sigma(t_1,t_2,\cdots,t_n)$のとき，$(q,u)\in\pi_\sigma$が$t$に対し正当とすると，$\mathrm{index}(u)=(q_1,x_{i_1})(q_2,x_{i_2})\cdots(q_k,x_{i_k})$ならば$(q,t)\Rightarrow_T u[(q_1,t_{i_1}),(q_2,t_{i_2}),\cdots,(q_k,t_{i_k})]\Rightarrow_T^* s$, $s\in\mathrm{T}_\Sigma$である．すると$s=u[s_1,s_2,\cdots,s_k]$と書け，各j, $1\le j\le k$に対し$(q_j,t_{i_j})\Rightarrow_T^* s_j$である．よって，帰納法の仮定より，$t_{i_j}(\varepsilon)=\delta$ならば$t_{i_j}$に対し$\pi_\delta$の正当な元で状態が$q_j$のものが存在する．逆に，各$j$, $1\le j\le k$に対し$t_{i_j}(\varepsilon)=\delta$ならば$t_{i_j}$に対し$\pi_\delta$の正当な元で状態が$q_j$のものが存在するとすると，帰納法の仮定より，$(q_j,t_{i_j})\Rightarrow_T^* s_j$, $s\in\mathrm{T}_\Sigma$である．よって，$(q,t)\Rightarrow_T^* u[s_1,s_2,\cdots,s_k]$となる．

定義 5.9 状態$q\in Q$が**到達可能**であるとは，$t\in\mathrm{T}_\Sigma$と$u\in\mathrm{T}_\Sigma(Q\times\mathrm{T}_\Sigma)$が存在して，$(q_0,t)\Rightarrow_t^* u$となり，$u$に状態$q$の付いたインデックスが存在することである．

定義 5.10 状態$q\in Q$が**有用**であるとは，$(q,t)\Rightarrow_T^* s$となる，$s,t\in\mathrm{T}_\Sigma$存在することである．

定義 5.11 変換Tが**既約**であるとは，Tの任意の状態が到達可能でかつ有用であることである．

補題 5.12 任意の変換Tに対し，$T=T'$となる既約な変換T'を実際に構成することができる．
(証明) 省略

補題 5.13 既約な非決定性トップダウン変換Tが単経路変換である必要十分条件は，任意の$t=\sigma(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathrm{T}_\Sigma$に対し，$\tau_\sigma$の正当な元で状態が$q\in Q$であるものは各状態に対し高々*1*つであることである．
(証明) Tが単経路変換であることを仮定し必要性を背理法で示す．$t\in\mathrm{T}_\Sigma$に対しπ_σの正当な元で状態が$q\in Q$であるものが複数あったとする．するとTは既約であるので，$s,u\in\mathrm{T}_\Sigma$と$t'\in\mathrm{T}_\Sigma(Q\times\mathrm{T}_\Sigma)$が存在して，$(q_0,s)\Rightarrow_T^* t'\Rightarrow_T^* u$であり，$(q,t)$が$t'$のインデックスに現れている．また，$s$の部分木$s'$に対して$(q,t)\Rightarrow_T^* s'$となっている．よって，複数の最左計算が存在してしまう．十分性の証明は単経路変換と正当の定義を用いて必要性の証明の逆をすればよい．

6 二段階変換と単経路変換の一致

定義 6.1 $t\in\mathrm{T}_\Sigma(Q\times X_n)$または$t\in\mathrm{T}_\Sigma(X_n)$が**ランク保存**であるとは，各$i$, $1\le i\le n$に対し，tのインデックスに変数x_iの付いたものが必ず一つ以上存在することである．変換Tが**ランク保存**であるとは，変換Tが$\mathrm{T}_\Sigma(Q\times X_n)$または$\mathrm{T}_\Sigma(X_n)$のランク保存な元だけを用いて定義されていることである．

これより，登場するすべての変換にこのランク保存という制限が仮定されているものとする．

定理 1 任意の単経路変換Uに対し，T=Uとなるような二段階変換Tが存在する．
(証明) $U=(Q,\Sigma,\pi,q_0)$を与えられた単経路変換とする．補題5.12より，Uは既約であると仮定してよい．これに対し二段階変換$T=(P,Q,\Sigma,\rho,\tau,F,q_0)$を次のように構成し$T=U$を示す．

- Q,q_0はUと同じとする．
- $P=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}2^{\pi_\sigma}$とする．
- $\rho=\{\rho_\sigma|\sigma\in\Sigma\}$は次のように定める．
  (1) $\lambda\in\Sigma_0$に対し，$\rho_\lambda=\pi_\lambda$とする．
  (2) $\sigma\in\Sigma_n$, $n\ge 1$に対し，$\rho_\sigma(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\{(q,u)\in\pi_\sigma\,|\,\mathrm{index}(u)=(q_1,x_{i_1})(q_2,x_{i_2})\cdots(q_k,x_{i_k})$ならば各$j$, $1\le j\le k$に対しある$s\in\mathrm{T}_\Sigma(Q\times X_n)$が存在して$(q_j,s)\in p_{i_j}$である$\}$とする．

- $\tau = \{\tau_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．$\sigma \in \Sigma$ すべてに対し，
$$\tau_\sigma(p,q) = \begin{cases} t & p\text{の元で状態が}q\text{のものは}(q,t)\text{ただ一つ} \\ \text{未定義} & otherwise \end{cases} \quad \text{とする．}$$
- $F = P$ とする．

このTの構成においてρをこのように定義したのは$\hat{\rho}$が次の$(*)$を満たすようにするためである．

$(*)$ $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathrm{T}_\Sigma$ に対し $\hat{\rho}(t) = \{(q,u) \in \pi_\sigma \,|\, (q,u)$ はtに対し正当である$\}$.

$(*)$が成り立つことは補題5.8より明らかである．すると，次の$(**)$も成り立つ．

$(**)$ $s \in \mathrm{T}_\Sigma$ が存在して $(q,t) \Rightarrow_U^* s$ となる必要十分条件は $(q,t) \Rightarrow_T^* s$ である．

$(**)$を$t \in \mathrm{T}_\Sigma$の帰納法で証明する．

$t = \lambda \in \Sigma_0$ のとき，もし $(q,t) \Rightarrow_U^* s$ ならば $(q,s) \in \pi_\lambda$ である．Uは単経路変換であり，π_λの元はすべて正当であるため，補題5.13より，π_λの元で状態がqであるものは(q,s)ただ一つであることがわかる．すると，$(*)$より，$(q,s) \in \hat{\rho}(t)$ となるので $\tau_\lambda(\hat{\rho}(t), q) = s$ である．ゆえに，$(q,t) \Rightarrow_T s$ となる．逆に，$(q,t) \Rightarrow_T s$ ならば $\tau_\lambda(\hat{\rho}(t), q) = s$ である．したがって，τの定義より，$(q,s) \in \pi_\lambda$ である．ゆえに，$(q,t) \Rightarrow_U s$ となる．

$t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，もし $(q,t) \Rightarrow_U s$ ならば，次を満たす $u \in \mathrm{T}_\Sigma(Q \times \mathrm{T}_\Sigma)$ が存在する．$\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば $(q,t) \Rightarrow_U u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})] \Rightarrow_U^* s$ であり，かつ $(q,u) \in \pi_\sigma$ である．すると，Uは単経路変換であるのでπ_σの正当な元で状態がqであるものは(q,u)ただ一つであることがわかる．よって，$\tau_\sigma(\hat{\rho}(t), q) = u$ である．また，帰納法の仮定より $s = u[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ とすると，各j, $1 \le j \le k$に対し $(q_j, t_{i_j}) \Rightarrow_T^* s_j$ である．ゆえに，$(q,t) \Rightarrow_T^* s$ となる．逆も同様に示すことができる．

$(**)$より，任意の$t \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し$s \in \mathrm{T}_\Sigma$が存在して，$(q_0, t) \Rightarrow_U^* s \Leftrightarrow (q_0, t) \Rightarrow_T^* s$ である．また，$\hat{\rho}(t) \in F$ は常に成り立つ．よって，$T = U$ が示された．

定理 2 任意の二段階変換Tに対し，$U = T$となるような単経路変換Uが存在する．

(証明) $T = (P, Q, \Sigma, \rho, \tau, F, q_0)$ を与えられた二段階変換とする．非決定性トップダウン変換 $U = (Q^U, \Sigma, \pi, q_0^U)$ を次のように構成し$U = T$かつUが単経路変換となることを示す．

- $Q^U = P \times Q \cup \{q_0^U\}$ とし，$q_0^U \notin P \times Q$ であるとする．
- $\pi = \{\pi_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$ は次のように定める．
  (1) $\lambda \in \Sigma_0$ に対し，$\pi'_\lambda = \{(p,q,u) \in P \times Q \times \mathrm{T}_\Sigma \,|\, \rho_\lambda = p,\ \tau_\lambda(p,q) = u\}$ とする．
  (2) $\sigma \in \Sigma_n$, $n \ge 1$ に対し，$\pi'_\sigma = \{(p,q,u) \in P \times Q \times \mathrm{T}_\Sigma(P \times Q \times \mathrm{T}_\Sigma) \,|$ 次の3つを満たす$\}$
    - $\mathrm{index}(u) = (p_1, q_1, x_{i_1})(p_2, q_2, x_{i_2}) \cdots (p_k, q_k, x_{i_k})$ と書け，$i_l = i_m$ ならば $p_l = p_m$ である．
    - $\tau_\sigma(p,q) = u[(q_1, x_{i_1}), (q_2, x_{i_2}), \cdots, (q_k, x_{i_k})]$ である．
    - $\rho_\sigma(p'_1, p'_2, \cdots, p'_n) = p$ である．ただし，各j, $1 \le j \le n$ に対し $j = i_m$ ならば $p'_j = p_m$ である．
      (ランク保存であるので，$p'_1, p'_2, \cdots, p'_n$ はすべて定まっている．)
  (3) $\sigma \in \Sigma$ すべてに対し，$\pi_\sigma = \pi'_\sigma \cup \{(q_0^U, u) \,|\, (p, q_0, u) \in \pi_\sigma,\ p \in F\}$ とする．

このようにUを構成すると次の$(*)$が成り立つ．

$(*)$ $t, s \in \mathrm{T}_\Sigma$ に対し，$(q,t) \Rightarrow_T^* s$, $\hat{\rho}(t) = p$ となる必要十分条件は $(p,q,t) \Rightarrow_U^* s$ である．

$(*)$を$t \in \mathrm{T}_\Sigma$の帰納法で証明する．

$t = \lambda \in \Sigma_0$ のとき，明らか．

$t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のとき，$(q,t) \Rightarrow_T^* s$, $\hat{\rho}(t) = p$ とすると，$\tau_\sigma(p,q) = u$, $\mathrm{index}(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ ならば，$(q,t) \Rightarrow_T u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})] \Rightarrow_T^* u[s_1, s_2, \cdots, s_k] = s$ と書け，各j, $1 \le j \le k$ に対し $(q_j, t_{i_j}) \Rightarrow_T^* s_j$ である．よって，帰納法の仮定より，各j, $1 \le j \le k$に対し $(\hat{\rho}(t_{i_j}), q_i, t_{i_j}) \Rightarrow_U^* s_j$ である．また，$(p, q, u[(\hat{\rho}(t_{i_1}), q_1, x_{i_1}), (\hat{\rho}(t_{i_2}), q_2, x_{i_2}), \cdots, (\hat{\rho}(t_{i_k}), q_k, x_{i_k})]) \in \pi_\sigma$ である．ゆえに，$(p,q,t) \Rightarrow_U^* s$ となる．逆も同様に示すことができる．

$(*)$より，$(q_0, t) \Rightarrow_T^* s$, $\hat{\rho}(t) \in F \Leftrightarrow (p, q_0, t) \Rightarrow_U^* s$, $p \in F$ が成り立つ．また，π_σの定義より，$(p, q_0, t) \Rightarrow_U^* s$, $p \in F \Leftrightarrow (q_0^U, t) \Rightarrow_U^* s$ である．よって，$T = U$ が示された．また，Uが単経路変換であることは，Uが決定的に動作する二段階変換Tを模倣することから明らかである．

7 単経路変換の合成

定義5.2を変更し，非決定性トップダウン変換Tの動作関数$\hat{\pi}$を $Q \times T_\Sigma(I) \to 2^{T_\Sigma(Q \times T_\Sigma(I))}$ の関数に拡張する．

- $t = \lambda \in \Sigma_0$のとき,$\hat{\pi}(q,t) = \{u | (q,u) \in \pi_\lambda\}$.
- $t = i \in I$のとき,$\hat{\pi}(q,t) = \{(q,i)\}$.
- $t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$のとき，$\hat{\pi}(q,t)$は次を満たす木の最小の集合である．$(q,u) \in \pi_\sigma$, $index(u) = (q_1, x_{i_1})(q_2, x_{i_2}) \cdots (q_k, x_{i_k})$ならば，$u[(q_1, t_{i_1}), (q_2, t_{i_2}), \cdots, (q_k, t_{i_k})]$は$\hat{\pi}(q,t)$に含まれる．

すると，関係$\Rightarrow_T$は定義5.3のままの定義で$T_\Sigma(Q \times T_\Sigma(I))$上の関係に拡張される．

定理 3 SとTを単経路変換とする．すると単経路変換Uが存在して，任意の$t \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し$U(t) = S(T(t))$となる．
(証明) $S = (Q^S, \Sigma, \pi^S, q_0^S)$, $T = (Q^T, \Sigma, \pi^T, q_0^T)$を与えられた単経路変換とする．これに対し単経路変換$U = (Q^U, \Sigma, \pi^U, q_0^U)$を次のように構成し，任意の$t \in \mathrm{T}_\Sigma$に対して$U(T) = S(T(t))$となることを示す．

- $Q^U = Q^S \times Q^T$とする．
- $q_0^U = (q_0^S, q_0^T)$とする．
- $\pi^U = \{\pi_\sigma^U \,|\, \sigma \in \Sigma\}$, $\pi_\sigma^U = \{(q^S, q^T, s) \,|\, (q^T, t) \in \pi_\sigma^T,\ (q^S, t) \Rightarrow_S^* s,\ s \in \mathrm{T}_\Sigma(Q^S \times Q^T \times \mathrm{T}_\Sigma)\}$とする．

このようにUを構成すると次の$(*)$が成り立つ．

$(*)$ $t, u \in \mathrm{T}_\Sigma$に対し，$s \in \mathrm{T}_\Sigma$が存在して$(q^T, t) \Rightarrow_T^* s$かつ$(q^S, s) \Rightarrow_S^* u$となる必要十分条件は$(q^S, q^T, t) \Rightarrow_U^* u$.
$(*)$を$t \in \mathrm{T}_\Sigma$の帰納法で証明する．

$t = \lambda \in \Sigma_0$のとき，明らか．

$t = \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_n)$のとき，$(q^T, t) \Rightarrow_T^* s$かつ$(q^S, s) \Rightarrow_S^* u$とすると，$\pi_\sigma^T$の元に$(q^T, t')$が存在して，$\mathrm{index}(t') = (q_1^T, x_{i_1})(q_2^T, x_{i_2}) \cdots (q_k^T, x_{i_k})$ならば$(q^T, t) \Rightarrow_T t'[(q_1^T, t_{i_1}), (q_2^T, t_{i_2}), \cdots, (q_k^T, t_{i_k})] \Rightarrow_T^* t'[s_1, s_2, \cdots, s_k] = s$と書け，各$j$, $1 \leq j \leq k$に対し$(q_j^T, t_{i_j}) \Rightarrow_T^* s_j$となっている．また，$(q^S, t') \Rightarrow_S^* t''$, $t'' \in \mathrm{T}_\Sigma(Q_S \times Q_T \times X_n)$であるとすると，$\mathrm{index}(t'') = (q_1^S, q_{j_1}^T, x_{i_{j_1}})(q_2^S, q_{j_2}^T, x_{i_{j_2}}) \cdots (q_m^S, q_{j_m}^T, x_{i_{j_m}})$ならば$(q^S, s) \Rightarrow_S^* t''[(q_1^S, s_{j_1}), (q_2^S, s_{j_2}), \cdots, (q_m^S, s_{j_m})] \Rightarrow_S^* t''[u_1, u_2, \cdots, u_m] = u$となり，各$r$, $1 \leq r \leq m$に対し$(q_r^S, s_{j_r}) \Rightarrow_S^* u_r$である．なお，$(q^S, t') \Rightarrow_S^* t''$であるから，$t''$のインデックスに$(q_r^S, q_{j_r}^T, x_{i_{j_r}})$があれば，必ず，$t'$のインデックスに$(q_{j_r}^T, x_{i_{j_r}})$が存在する．よって，帰納法の仮定より，各$r$, $1 \leq r \leq m$ に対し$(q_r^S, q_{j_r}^T, t_{i_{j_r}}) \Rightarrow_U^* u_r$である． ゆえに，$\pi_\sigma^U$の定義より，$(q^S, q^T, t'') \in \pi_\sigma^U$だから，$(q^S, q^T, t) \Rightarrow_U^* u$となる．逆に，$(q^S, q^T, t) \Rightarrow_U^* u$とすると，$\pi_\sigma^U$の元に$(q^S, q^T, t'')$が存在して，$\mathrm{index}(t'') = (q_1^S, q_1^T, x_{i_1})(q_2^S, q_2^T, x_{i_2}) \cdots (q_k^S, q_k^T, x_{i_k})$であるなら$(q^S, q^T, t) \Rightarrow_U t''[(q_1^S, q_1^T, t_{i_1}), (q_2^S, q_2^T, t_{i_2}), \cdots, (q_k^S, q_k^T, t_{i_k})] \Rightarrow_U^* t''[u_1, u_2, \cdots, u_k] = u$と書け，各$j$, $1 \leq j \leq k$に対し$(q_j^S, q_j^T, t_{i_j}) \Rightarrow_U^* u_j$となっている．また，$\pi_\sigma^U$の定義より,$(q^T, t') \in \pi_\sigma^T$が存在して$(q^S, t') \Rightarrow_S^* t''$である．$\mathrm{index}(t') = (q_{j_1}^T, x_{i_{j_1}})(q_{j_2}^T, x_{i_{j_2}}) \cdots (q_{j_m}^T, x_{i_{j_m}})$とすると，ランク保存であるから，$t'$のインデックスに$(q_{j_r}^T, x_{i_{j_r}})$があれば，必ず，$t''$のインデックスに$(q_{j_r}^S, q_{j_r}^T, x_{i_{j_r}})$が存在する．よって，帰納法の仮定より，$s_1, s_2, \cdots, s_m \in \mathrm{T}_\Sigma$が存在して，各$r$, $1 \leq r \leq m$に対し$(q_{j_r}^T, t_{i_{j_r}}) \Rightarrow_T^* s_r$となる．また，各$h$, $1 \leq h \leq k$において$j_r = h$なるrに対し，$(q_h^S, s_r) \Rightarrow_S^* u_h$である．ゆえに，$s = t'[s_1, s_2, \cdots, s_m]$とすれば$(q^T, t) \Rightarrow_T^* s$かつ$(q^S, t) \Rightarrow_S^* u$となる．

$(*)$より，任意の$t \in \mathrm{T}_\Sigma$に対して$U(t) = S(T(t))$が成り立つことと，変換Uが単経路となることは明らか．

8 まとめ

トップダウン変換とボトムアップ変換を有限回組み合わせることによって実現される木変換，多段階木変換を考える．二段階変換はトップダウン変換とボトムアップ変換の両者の能力を含んでいる．ランク保存という条件の下で，定理1及び定理2によって二段階変換と単経路変換が一致することが示された．定理3によって単経路変換が合成で閉じていることを示された．よって，二段階変換は合成で閉じている．二段階変換は一回の変換で多段階木変換と同等の能力を持った変換を行うことができる．

ランク保存という条件なしでも二段階変換が合成で閉じていると強く予想している．今後，この条件なしで二段階変換と多段階木変換が一致することを調べる．

参考文献

[1] W. S. Brainerd, " Tree Generating Regular Systems", Information and Control, 14, pp217-231 (1969)

[2] W. C. Rounds, " Mapping and Grammers on Trees", Mathmatical Systems Theory, 4, 3, pp257-287 (1970)

[3] J. W. Thatcher, " Generalized² Sequential Machine Maps", Journal of Computer and System Sciences, 4, pp339-367 (1970)